Grupa A - Pismeni ispit iz Matematike, 23.01.2014., ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka

1. Naći ekstreme funkcije $z = \frac{1}{3}x^3 - 2xy + x + 3y^2 - 4y$

2. Izračunati integrale (a) $\int \frac{x-1}{\sqrt{-1+4x-x^2}}\mathrm{d}x$; (b) $\int \frac{4x^2+11x-2}{x^3-3x-2}\mathrm{d}x$.

3. Odrediti površinu figure ograničene parabolom $4x = 8y - y^2$ i pravom $4x = y + 6$.

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$.

Grupa B - Pismeni ispit iz Matematike, 23.01.2014., ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka

1. Naći ekstreme funkcije $z = \frac{1}{3}x^3 - 2xy + x + 3y^2 - 4y$

2. Izračunati integrale (a) $\int \frac{x-1}{\sqrt{-1+4x-x^2}}\mathrm{d}x$; (b) $\int \frac{4x^2+11x-2}{x^3-3x-2}\mathrm{d}x$.

3. Odrediti površinu figure ograničene parabolom $4x = 8y - y^2$ i pravom $4x = y + 6$.

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$.

Grupa C - Pismeni ispit iz Matematike, 23.01.2014., ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka

1. Naći ekstreme funkcije $z = \frac{1}{3}x^3 - 2xy + x + 3y^2 - 4y$

2. Izračunati integrale (a) $\int \frac{x-1}{\sqrt{-1+4x-x^2}}\mathrm{d}x$; (b) $\int \frac{4x^2+11x-2}{x^3-3x-2}\mathrm{d}x$.

3. Odrediti površinu figure ograničene parabolom $4x = 8y - y^2$ i pravom $4x = y + 6$.

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$.

Grupa D - Pismeni ispit iz Matematike, 23.01.2014., ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka

1. Naći ekstreme funkcije $z = \frac{1}{3}x^3 - 2xy + x + 3y^2 - 4y$

2. Izračunati integrale (a) $\int \frac{x-1}{\sqrt{-1+4x-x^2}}\mathrm{d}x$; (b) $\int \frac{4x^2+11x-2}{x^3-3x-2}\mathrm{d}x$.

3. Odrediti površinu figure ograničene parabolom $4x = 8y - y^2$ i pravom $4x = y + 6$.

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$.

\# Naći ekstreme f-je $z = \frac{1}{3}x^3 - 2xy + x + 3y^2 - 4y$.

Rj. - upute

$z'_x = x^2 - 2y + 1$

$z'_y = -2x + 6y - 4$

$$\begin{aligned} x^2 - 2y + 1 &= 0 \quad /\cdot 3 \\ -2x + 6y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6y + 3 &= 0 \\ -2x + 6y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$\vdots$

Stacionarne tačke su $M_1(1;1)$ i $M_2\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$

$M_1(1;1)$

$A = 2, \quad B = -2, \quad C = 6$

$D = 8 > 0 \Rightarrow$ f-ja ima ekstrem

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$z_{min}(1;1) = \ldots = -\frac{5}{3}$

$M_2\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right)$

$\vdots$

$D = -8 < 0 \Rightarrow$ f-ja u tački M_2 nema ekstrem

(#) Izračunati integrale

a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{-1+4x-x^2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{4x^2+11x-2}{x^3-3x-2}\,dx$

Rj: Jedan od načina za rješavanje je sljedeći

(a) $-1+4x-x^2 = -(x^2-4x+1) = -(x^2-2\cdot x\cdot 2+4-4+1) =$

$= -((x-2)^2-3) = 3-(x-2)^2$

Prema tome

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{-1+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{x-1\overset{-1+1}{}}{\sqrt{3-(x-2)^2}}\,dx = \int \frac{x-2}{\sqrt{3-(x-2)^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-2)^2}}$$

$$= -\int \left(3-(x-2)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,d\left(3-(x-2)^2\right) + \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{3-(x-2)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3-(x-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\sqrt{3-(x-2)^2} + \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

(b) $\displaystyle\frac{4x^3+11x\cdot 2}{x^3-3x-2} = \ldots = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{4}{x-2}$

$$\int \frac{4x^2+11x-2}{x^3-3x-2}\,dx = \int\left(\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{4}{x-2}\right)dx = 3\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^{-2}} + 4\int \frac{d(x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{-3}{x+1} + 4\ln|x-2|$$

(#) Odrediti površinu figure ograničene parabolom $4x = 8y - y^2$ i pravom $4x = y + 6$.

Rj.-upute

$4x = 8y - y^2$
$4x = y + 6$

$8y - y^2 = y + 6$
$y^2 - 7y + 6 = 0$
$(y-1)(y-6) = 0$
$y_1 = 1$
$y_2 = 6$

$y = 1 \Rightarrow 4x = 1+6$
$4x = 7$
$x = \frac{7}{4}$

$y = 6 \Rightarrow 4x = 6+6$
$x = 3$

Parabola i prava se sijeku u tačkama $(\frac{7}{4}; 1)$ i $(3; 6)$

$4x = 8y - y^2 \quad /:4$

$x = 2y - \frac{1}{4}y^2$

$x' = 2 - \frac{1}{2}y$

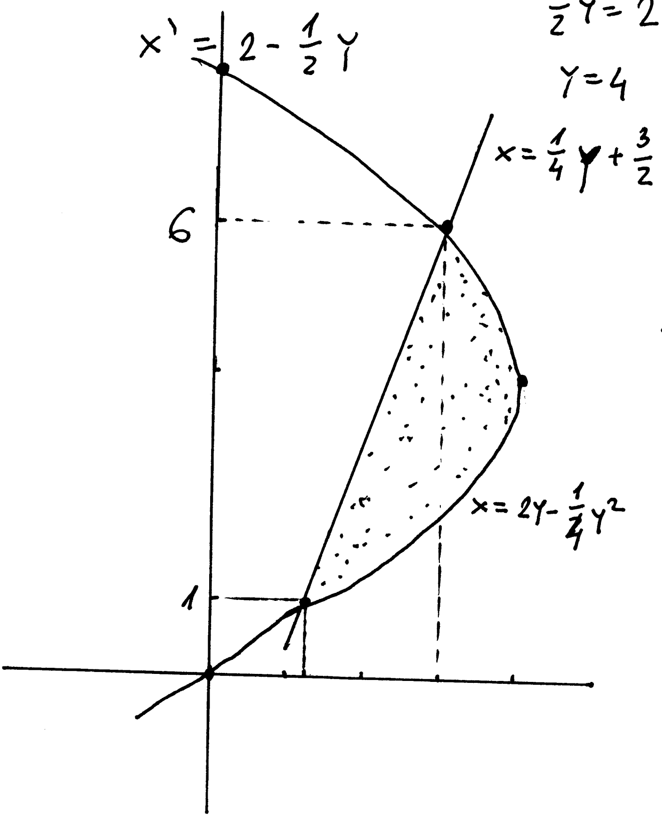
$2 - \frac{1}{2}y = 0$

$\frac{1}{2}y = 2$

$y = 4$

$4x = 32 - 16$

$\Rightarrow$ Tjeme parabole $4x = 8y - y^2$ je u tački $T(4; 4)$



$$P = \int_1^6 \left[\left(2y - \frac{1}{4}y^2\right) - \left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{2}\right)\right] dy =$$

$$= \int_1^6 \left(-\frac{1}{4}y^2 + \frac{7}{4}y - \frac{3}{2}\right) dy = \ldots =$$

$$= \frac{125}{24} \text{ tražena površina}$$

(#) Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$y' - y\,ctg\,x = \sin x$$

Rj: Primjetimo da imamo linearnu diferencijalnu jednačinu.
Uvodimo smjenu $y = uv$

$y' = u'v + uv'$ gdje su u i v dvije pomoćne fje
(želimo dobiti dvije diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjenjivim)

$$u'v + uv' - uv\,ctg\,x = \sin x$$

$$u'v + \underbrace{u(v' - v\,ctg\,x)}_{=0} = \sin x$$

(a)

$$v' - v\,ctg\,x = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = v\,ctg\,x$$

$$\frac{dv}{v} = ctg\,x\,dx$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\ln v = \ln \sin x$$

$$v = \sin x$$

(b)

$$u'v = \sin x$$

$$u' \sin x = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$u = x + C$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine je $y = (x + C)\sin x$.